

The Effect of Using Multiple Representations on Mathematics Teachers Teaching based on Solo Theory in the Topic of Equations and Line Equations

Vahid Alamian^{*1} , and Reza Khalili Zadeh² 

1. Corresponding author, Department of Mathematics Education, Farhangian University, P.O. Box 14665-889, Tehran, Iran. E-mail: Vahid_alamian@cfu.ac.ir

1. Master of Science in Mathematics Education, Shahid Chamran Campus, Farhangian University, Tehran, Iran. E-mail: khalilir957@gmail.com

ABSTRACT

Article type:
Research Article

Received: 2024/07/17
Reviewed: 2024/09/12
Accepted: 2024/10/05
Published Online:
2024/11/05
Pages: 33-50

Keywords:
Representation,
Multiple representations,
Mathematics education,
Solo theory,
Equation,
Line equation

Background and Objectives: Multiple representations are a strategy for teaching mathematical concepts, meaning introducing or showing a concept in various situations and forms. One of the models presented in the theory of mathematics education is the Solo model. Instead of addressing what learners have learned, this model examines the quality of their responses. The purpose of this study is to examine the effect of using multiple representations on teaching mathematics teachers based on Solo theory in the topic of equations. **Methods:** Method of the present research is a quasi-experimental with two experimental and control groups, using real world artifacts and tools to teach the concept of equilibrium, variable, ... Finally, we introduce the general structure of the equation and also introduce a real-world problem into the mathematical world and then solve it. The number of participants was 15 mathematics teachers who were considered a sample available to the researcher. To collect data, the researcher created a mathematical test that included 10 questions and classified the test questions according to the Solo model. The validity of the tests was obtained and confirmed by the CVR method with a value of 0.76 and the reliability was obtained and confirmed by the Cronbach's alpha method with a value of 0.889. **Findings:** The results of the study using the t-test for two independent groups using SPSS software show that multiple representations had the greatest impact on teachers' teaching based on Solo theory, so that at the relational and generalized abstraction levels, the experimental group performed much better than the control group, but at the unistructural and multistructural levels, the control group performed better than the experimental group. Also, the teachers' view of teaching using Solo theory was interesting and enthusiastic. **Conclusion:** The use of various modes of representation without establishing meaningful connections between them cannot lead to conceptual and deep learning among learners. The lack of integration and coherence among these representations may even result in cognitive conflicts and misconceptions, hindering the learning process rather than facilitating it.

Cite this Article: Alamian, V., & Khalili Zadeh, R. (2024). The Effect of Using Multiple Representations on Mathematics Teachers Teaching based on Solo Theory in the Topic of Equations and Line Equations. *The Journal of Theory and Practice in Teachers Education*, 10(18), 33-50. <https://doi.org/10.48310/itt.2025.3964>



© the authors
Publisher: Farhangian University





تأثیر به کارگیری بازنمایی‌های چندگانه بر تدریس معلمان ریاضی بر اساس نظریه سولو در مبحث معادله و معادله خط

وحید عالمیان^{۱*} و رضا خلیلی‌زاده^۲

۱. نویسنده مسئول، گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی -۸۸۸ ۵۶۴۴۱ تهران، ایران. رایانامه:

Vahid_Alamian@cfu.ac.ir

۲. کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، پردیس شهید چمران، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران. رایانامه: khalilir957@gmail.com

چکیده

نوع مقاله: پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۴/۲۷

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۰۶/۲۲

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۷/۱۴

تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۳/۰۸/۱۵

شماره صفحات: ۵۰-۳۳

پیشینه و اهداف: بازنمایی چندگانه، راهبردی برای آموزش مفاهیم ریاضی و به معنای معرفی یا نشان دادن یک مفهوم در وضعیت‌ها و شکل‌های گوناگون است. یکی از مدل‌های ارائه شده در نظریه آموزش ریاضی مدل سولو است، این مدل به جای پرداختن به آنچه فراگیران آموخته‌اند، به بررسی کیفیت پاسخ‌های آن‌ها می‌پردازد. هدف از این پژوهش، تأثیر به کارگیری بازنمایی‌های چندگانه بر تدریس معلمان ریاضی بر اساس نظریه سولو در مبحث معادله و معادله خط است. **روش‌ها:** روش پژوهش نیمه تجربی با دو گروه آزمایش و کنترل بدین صورت که با استفاده از دست‌سازها و ابزار دنیای واقعی مفهوم تعادل، متغیر و... در نهایت ساختار کلی معادله را آموزش و همچنین یک مسئله از دنیای واقعی را وارد دنیای ریاضی کرده و سپس آن را حل کنیم. تعداد شرکت‌کنندگان ۱۵ معلم ریاضی که نمونه در دسترس پژوهشگر محسوب می‌شدند. برای گردآوری داده‌ها از آزمون ریاضی محقق ساخته که سوالات آزمون طبق مدل سولو طبقه‌بندی و شامل ۱۰ سؤال است. روایی آزمون‌ها با روش CVR با عدد ۰/۷۶ و پایایی با روش آلفای کرونباخ ۰/۸۸۹ به دست آمد و تأیید گردید. **یافته‌ها:** نتایج پژوهش با استفاده از آزمون t تست برای دو گروه مستقل با استفاده از نرم‌افزار SPSS نشان می‌دهد که بازنمایی چندگانه بر تدریس معلمان بر اساس نظریه سولو بیشترین تأثیر داشته، به طوری که در سطح رابطه‌ای و انتزاع تعمیم‌یافته گروه آزمایش عملکرد خیلی بهتری نسبت به گروه گواه داشته‌اند؛ اما در سطح تک‌ساختاری و چندساختاری عملکرد گروه گواه بهتر از گروه آزمایش بوده است همچنین نگاه معلمان به آموزش با استفاده از نظریه سولو به نوبه خود جالب و مشتاقانه بود. **نتیجه‌گیری:** به کارگیری حالت‌های مختلف بازنمایی بدون مرتبط و متصل کردن آن‌ها نمی‌تواند موجب یادگیری مفهومی و عمیق در مخاطبان شود و عدم اتصال و ارتباط این بازنمایی‌ها حتی خود ممکن است سبب ایجاد تعارضات و بدفهمی‌هایی در مخاطبان گردد.

واژه‌های کلیدی:

تربیت،

مبانی فلسفی،

تربیت معلم،

امام خمینی (ره)،

مقام معظم رهبری (مدظله‌العالی)،

دانشجو معلم

استناد به این مقاله: عالمیان، وحید، و خلیلی‌زاده، رضا. (۱۴۰۳). تأثیر به کارگیری بازنمایی‌های چندگانه بر تدریس معلمان ریاضی

بر اساس نظریه سولو در مبحث معادله و معادله خط. نظریه و عمل در تربیت معلمان، ۱۰(۱۸)، ۵۰-۳۳.

<https://doi.org/10.48310/itt.2025.3964>



© نویسندگان

ناشر: دانشگاه فرهنگیان



مقدمه

شورای ملی معلمان ریاضی^۱ (2000) بخش مهمی از فرایند یادگیری ریاضی را چگونگی استفاده از بازنمایی‌های ریاضی می‌داند. بازنمایی‌ها نقش اساسی در آموزش و یادگیری ریاضیات دارند؛ زیرا به معلمان و دانش‌آموزان کمک می‌کنند تا مفاهیم انتزاعی ریاضیات را درک کنند و استفاده از انواع مختلف نمایش، اغلب جنبه‌های مختلف ایده‌ها یا روابط پیچیده ریاضی را روشن می‌کند. درواقع، راهبردهای آموزشی باید شامل ترجمه همه شیوه‌های نمایش باشد، زیرا هر نمایش ویژگی‌های خاص خود را دارد و چالش‌های متفاوتی را برای کسانی که مسائل ریاضی را انجام می‌دهند، ایجاد می‌کند (Gagatsis & Shaikalli, 2004). سیستم‌های بازنمایی برای برقراری ارتباط و کار با موضوعات و مفاهیم ریاضی ضروری هستند و استدلال می‌کند که فعالیت‌های ریاضی به‌طور مشخص شامل استفاده هم‌زمان از حداقل دو بازنمایی یا تغییر از یک بازنمایی به بازنمایی دیگر هستند. آموز شگران ریاضی مدل‌های مختلفی برای به‌کارگیری انواع بازنمایی‌ها تحت عنوان کلی بازنمایی‌های چندگانه در آموزش مفاهیم و روابط ریاضی پیشنهاد داده‌اند، یکی از این مدل‌ها، مدلی است که توسط لَش^۲ پیشنهاد شده است. استفاده از بازنمایی‌های گوناگون و مرتبط کردن آن‌ها با یکدیگر، باعث درک بهتر مفاهیم ریاضی می‌شود. تحقیقات صورت گرفته در این حوزه نشان می‌دهد، اگر بازنمایی‌ها به صورت مؤثری با هم متصل شوند، زمینه درک عمیق موضوعات ریاضی فراهم می‌شود. (Lesh, De Jong, t. & Van Joolingen, 1998). یکی از معروف‌ترین مدل‌های عمومی برای ارزیابی پیچیدگی نتایج یادگیری، طبقه‌بندی سولو است. (et al., 1987). یکی از ساختار نتایج یادگیری قابل‌مشاهده یکی از کاربردی‌ترین طبقه‌بندی‌ها است که در زمره چارچوب‌های عمومی و موضعی رشد شناختی قرار می‌گیرد (Uyun, & Wardana, 2023). سولو^۳ به‌عنوان ابزاری برای ارزیابی کیفیت پاسخ‌ها به هنگام حل مسئله کاربرد دارد. باید توجه داشت که نمی‌توان مستقیماً فرآیند فکری افراد را دید، اما می‌توان توانایی‌های شناختی او را از نوع و کیفیت پاسخ داده شده، شناسایی کرد (Suratman et al., 2019).

طبقه‌بندی سولو یکی از روش‌هایی است که نتایج یادگیری را مورد سنجش قرار می‌دهد و به‌طور کلی، طبقه‌بندی سولو دارای پنج سطح است: ۱. پیش ساختاری^۴، ۲. تک ساختاری^۵، ۳. چند ساختاری^۶، ۴. رابطه‌ای^۷، ۵. انتزاع تعمیم‌یافته^۸ که با آموزش مفاهیم بر اساس طبقه‌بندی سولو مشخص می‌شود که سطح یادگیری افراد نسبت به مفهوم موردنظر در کدام سطح قرار دارند. لازم به ذکر است که تحقیقات بسیار کمی توسط محققین داخلی در رابطه با طبقه‌بندی سولو در کشور ما انجام گرفته است.

این مطالعه به تأثیر به‌کارگیری بازنمایی‌های چندگانه بر تدریس معلمان ریاضی در مبحث معادله و معادله خط و بررسی سطح یادگیری آن‌ها بر طبق نظریه سولو می‌پردازد. مفهوم خط و معادله خط از جمله مفاهیمی است که به پیش‌نیاز یادگیری مفهوم معادله و پیدا کردن مختصات یک نقطه (رسم خط) و... است. علاوه بر این، دانستن مفهوم معادله خط و مفاهیم مرتبط به آن و همچنین نحوه ارتباط و اتصال این مفاهیم به یکدیگر، پیش‌نیازی برای فهم بسیاری از مباحث دیگر در ریاضیات دبیرستانی است. (مباحثی مثل توابع خطی، مفاهیم آهنگ متوسط و لحظه‌ای و مشتق‌گیری، تابع، حل معادله‌های درجه ۱ و ۲ و ۳ و...). آموز شگران ریاضی مدل‌های مختلفی را برای به‌کارگیری بازنمایی‌های چندگانه در آموزش مفاهیم و روابط ریاضی پیشنهاد داده‌اند. یکی از آن‌ها مدلی است که توسط لَش پیشنهاد شده است. این مدل بر اساس نظریه‌های پایانه، برونر و دینس ساخته شده است. این مدل بر درک عمیق ایده‌های ریاضی در پنج شیوه مختلف و بازتاب توانایی برقراری اتصالات بین این پنج شیوه تأکید می‌کند (نوروزلرکی، ۱۳۸۹). این پنج شیوه متمایز از بازنمایی

1. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)
2. Lesh
3. Structure of Observed Learning Outcome (Solo)
4. pre-structural
5. uni-structural
6. multi-structural
7. relational
8. extended abstract

ها که در یادگیری و حل مسئله‌های ریاضی رخ می‌دهند، عبارت‌اند از:

بازنمایی تصویری (اشکال و تصاویر): در این حالت با مشاهده یا رسم شکل، نمودار یا تصویر، برای فکر کردن و ارتباط برقرار کردن با یک مفهوم ریاضی به‌طور شهودی استفاده می‌کنند.

بازنمایی نوشتاری (ذهنی): نمادگذاری‌هایی هستند که از آن‌ها برای فکر کردن و ارتباط برقرار کردن با یک مفهوم ریاضی در نوشتن به کار می‌برند و شامل نام‌ها، نمادها، اصول و توصیفات هستند.

بازنمایی فیزیکی (دست‌ورزی): در این حالت برای فکر کردن و ارتباط برقرار کردن با یک مفهوم ریاضی، از دست‌ورزی روی اشیاء استفاده می‌کنند (گویا و امامی، ۱۳۹۲).

بازنمایی گفتاری (شفاهی): در این حالت، از کلمات و توضیحاتی برای صحبت کردن در مورد یک مفهوم ریاضی استفاده می‌کنند.

بازنمایی ملموس (دنیای واقعی): در این حالت، مفهوم موردنظر در ابتدا با رویدادها و کاربردهای آن در دنیای واقعی سازمان‌دهی می‌شود. یکی دیگر از روش‌هایی که درک عمیق یادگیری را مورد سنجش قرار می‌دهد استفاده از سطوح طبقه‌بندی سولو است و آن را به یک طبقه‌بندی خوب برای حوزه تحلیل تبدیل می‌کند چرا که نتایج یادگیری افراد را بر اساس درجه پیچیدگی آن‌ها دسته‌بندی می‌کند. از آنجایی که طی کردن هر یک از سطوح سولو، و رسیدن به آخرین سطح یعنی انتزاع تعمیم‌یافته مستلزم طی کردن و تسلط بر سطوح قبلی است و تا هر یک از سطوح سولو توسط فرد مرحله‌به‌مرحله درک نشود، نمی‌تواند به مرحله بعدی برود (Hidayatullah, 2016) که به‌طور کلی طبقه‌بندی سولو دارای پنج سطح پیش‌ساختاری، تک ساختاری، چند ساختاری، رابطه‌ای، انتزاع تعمیم‌یافته است.

ترجمه بازنمایی‌ها

در آموزش و یادگیری ریاضیات، حالت‌های مختلف نمایش به یک اندازه مورد استفاده قرار می‌گیرند و نقش مهمی در درک مفاهیم ریاضی دارند. هم در تدریس و هم در یادگیری ریاضیات، ما دائماً نیاز داریم که از یک حالت نمایش به حالت دیگر نمایش تغییر کنیم. واقعیت این است که بازنمایی در یادگیری ریاضیات ضروری است و ترجمه بازنمایی به‌اندازه استفاده از بازنمایی در آموزش و یادگیری ریاضیات مهم است (Duval, 2006) برای مثال، معلمان به‌طور مداوم در حین حل مسائل ریاضی، استفاده از یک حالت نمایش را به دیگری تغییر می‌دهند. استفاده از انواع مختلف نمایش، اغلب جنبه‌های مختلف ایده‌ها یا روابط پیچیده ریاضی را روشن می‌کند (شورای ملی معلمان ریاضی، ۲۰۰۰). مهم است که مهارت‌هایی را در معلمان ایجاد کنیم تا بتوانند یک شیوه نمایش را بر اساس ماهیت و موقعیت تکالیف ریاضی به دیگری ترجمه کنند. درواقع، راهبردهای آموزشی باید شامل ترجمه همه شیوه‌های نمایش باشد، زیرا هر نمایش ویژگی‌های خاص خود را دارد و چالش‌های متفاوتی را برای کسانی که مسائل ریاضی را آموزش می‌دهند، ایجاد می‌کند (Gagatsis & Shaikalli, 2004).

نقش معلمان در استفاده از بازنمایی‌های چندگانه

شورای ملی معلمان ریاضی، بخش مهمی از فرآیند یادگیری ریاضی را چگونگی استفاده از بازنمایی‌های ریاضی می‌داند. به اعتقاد این شورا، معلمان باید بازنمایی‌های مرسوم و معمول ریاضی را به دانش‌آموزان نشان داده و به آن‌ها کمک کنند تا به‌طور مؤثری از بازنمایی در مواقع لزوم استفاده کنند. معلمان باید اهمیت ارائه‌کردن ایده‌ها و مفاهیم ریاضی با استفاده از روش‌های مختلف را مورد تأکید قرار دهند. آنان می‌توانند این کار را هنگامی که در کلاس درس روی یک مسئله کار می‌کنند انجام دهند، تا از این طریق دانش‌آموزان را برای به‌کارگیری بازنمایی‌های مختلف و نقد و بررسی آن‌ها برانگیخته کنند.

معلمان با گوش دادن به ایده‌های دانش‌آموزان و کمک به آنان در انتخاب و سازمان‌دهی بازنمایی‌هایی که تفکرشان را نشان خواهد داد، می‌توانند به دانش‌آموزان کمک کنند تا تمایل و مهارتشان را برای مدل‌سازی مسئله به‌صورتی کارآمد، برای روشن کردن درک شخصی‌شان از مسئله، و برای استفاده از بازنمایی‌ها در برقراری ارتباط مؤثر با دیگران توسعه دهند.

(شورای ملی معلمان ریاضی، ۲۰۰۰).

به همین ترتیب، Dufour-Janver و همکاران (۱۹۸۷) چندین دلایل استفاده از بازنمایی در آموزش ریاضی و برخی از آن‌ها به شرح زیر است:

- بازنمایی‌ها بخش ذاتی از ریاضیات هستند: موضوعاتی در ریاضیات وجود دارد که به شدت با بازنمایی مرتبط است. کسی نمی‌تواند وانمود کند که این مفاهیم را بدون کمک بازنمایی‌ها مطالعه کرده است. به عنوان مثال، آموزش و یادگیری مفاهیم تابع و گرافیک دکارتی همیشه با بازنمایی همراه است.
- بازنمایی‌ها تجسم چندگانه یک مفهوم هستند: چندین بازنمایی مختلف ممکن است یک مفهوم یا همان ساختار ریاضی را در برگیرند. در حین ارائه مفاهیم ریاضی با کمک نمایش‌های متنوع، فراگیران ویژگی‌های مشترک را درک می‌کنند که آن‌ها را قادر می‌سازد مفاهیم موردنظر را استخراج کنند.
- بازنمایی‌ها به صورت محلی برای کاهش مشکلات خاص استفاده می‌شوند: کتاب‌های درسی ریاضیات و معلمان ریاضی از بازنمایی‌ها در طول فرآیند تدریس و یادگیری استفاده قابل توجهی می‌کنند. هنگامی که دانش‌آموزان در یادگیری مفاهیم خاصی دچار مشکل می‌شوند، معلمان از چندین نمایش استفاده می‌کنند تا فرآیند یادگیری را برای یادگیرندگان آسان کنند.

- بازنمایی‌ها برای جذاب‌تر و جالب‌تر کردن ریاضیات در نظر گرفته شده‌اند: نویسندگان از انواع مختلفی از نمایش‌ها به طور گسترده در کتاب‌های درسی اخیر استفاده می‌کنند تا ارائه ریاضیات را برای ایجاد انگیزه در دانش‌آموزان زیباتر کنند. به عنوان مثال، انواع بازنمایی‌ها را می‌توان در کتاب‌های درسی به منظور ارائه مسائل دنیای واقعی مشاهده کرد.

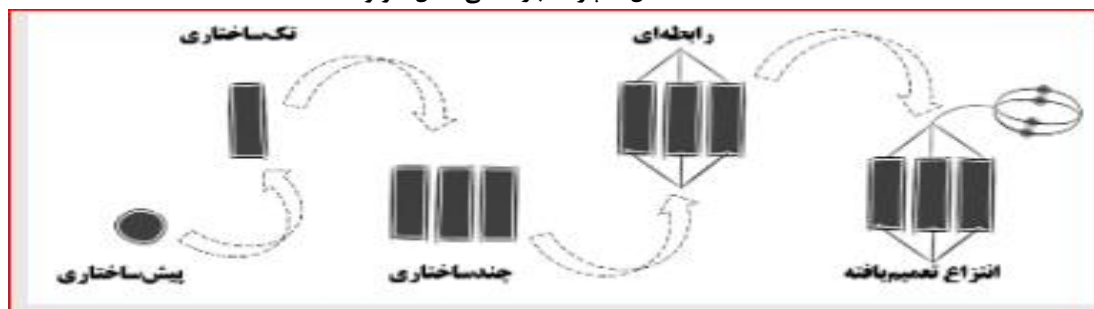
معرفی رهیافت SOLO

سولو که ما آن را ساختار نتایج یادگیری قابل مشاهده یا ساختار نتایج مشهود یادگیری تعریف می‌کنیم. حق جو و ریحانی (۱۳۹۸) این عبارت‌ها را به صورت زیر تشریح کرده‌اند:

نتایج یادگیری: اظهاراتی است که نشان می‌دهد در پایان تدریس چه چیزی را خواهند دانست، چه چیزی را مورد اهمیت قرار خواهند داد و قادر به انجام آن خواهند بود. این نتایج، هدف‌های قابل ارزیابی آموزش هستند، با تمرکز بر آنچه انتظار داریم که مخاطبان ما در صورت یادگیری موفق به آن برسند.

نتایج یادگیری قابل مشاهده: پاسخ‌هایی که افراد به سؤالات ارزیابی می‌دهند. ساختار نتایج یادگیری قابل مشاهده: پاسخ‌های افراد را که به سؤالات ارزیابی داده‌اند از دو جنبه کدگذاری می‌کنند. یکی بر اساس نوع تفکر با استفاده از پنج حالت رشد شناختی (حسی - حرکتی، تصویری، عینی - نمادین، صوری و فراصوری)، و جنبه دیگر کیفیت پاسخ را درون یک حالت با استفاده از پنج سطح پیش ساختاری، تک ساختاری، چندساختاری، رابطه‌ای و انتزاع تعمیم یافته، توصیف می‌کند. کل (۱)

شکل ۱. چرخه بازگشتی کامل سولو



مدل سولو توضیح می‌دهد که چگونه پاسخ‌های مخاطبان به وظایف، ساختار، پیچیدگی و انتزاع را افزایش می‌دهد و پیشرفت درک را از یک یادگیرنده مبتدی به یک متخصص نشان می‌دهد. برخلاف روش سنتی که «چه مقدار» آموختن

را مورد توجه قرار می‌دهند، این تجزیه و تحلیل بر این تمرکز دارد که مطالب «تا چه حد خوب» آموخته شده‌اند (Pegg, 1992). قدرت سولو در این است که چارچوبی ارائه می‌دهد تا امکان ارائه تفسیری سازگار از ساختار و کیفیت پاسخ‌های تعداد زیادی از افراد را در محیط‌های گوناگون یادگیری در چندین حوزه موضوعی فراهم می‌کند. وقتی معلمان مدل سولو را درک می‌کنند آن‌ها از یادگیری خود برخوردار هستند و در سفر یادگیری و آموزش خود احساس اطمینان بیشتری می‌کنند که به آن‌ها کمک می‌کند تا استاد دانش خود شوند (Hook, 2016). آن‌ها می‌توانند تعیین کنند که در نهایت چه چیزی را باید آموزش دهند و هدف نهایی در تدریس مفهوم مورد نظر را مشخص کنند.

طبقه‌بندی سولو بر اساس تجزیه و تحلیل دقیق پاسخ‌ها به سؤالات ارزیابی، بنا شده است. این طبقه‌بندی برای اولین بار توسط بیگز و کوین کولیس در سال ۱۹۸۲ معرفی شد. سطوح مختلف سولو عبارت‌اند از: سطح پیش ساختاری، سطح تک ساختاری، سطح چند ساختاری، سطح رابطه‌ای، سطح انتزاع تعمیم‌یافته. ارزیابی سطوح پیش ساختاری، تک ساختاری و چند ساختاری کمی و ارزیابی سطوح رابطه‌ای و انتزاع تعمیم‌یافته به صورت کیفی است که به توضیح مختصری از این سطوح می‌پردازیم.

سطح پیش ساختاری: مخاطبان اطلاعات بسیار کمی دارند که حتی به هم مرتبط نیستند، معمولاً پاسخ‌های سخی که می‌دهد مربوط به مسئله مورد نظر نیست و یا اصلاً پاسخی به مسئله نمی‌دهد (Saputra et al., 2019).

سطح تک ساختاری: در این سطح مخاطبان روی یک جنبه از سؤال تمرکز می‌کند و از آن برای تولید یک پاسخ معتبر، اما ساده استفاده می‌کند؛ بنابراین، از سطح یک تا دو، پیشرفت‌هایی را مشاهده می‌کنیم که مخاطب قادر به تشخیص موضوعات مربوطه و برخورد با یکی از این موارد در رابطه با مسئله است (Brabrand & Dahl, 2007).

سطح چند ساختاری: در این سطح مخاطبان از برخی اطلاعات و داده‌های مسئله استفاده می‌کند؛ اما از نظر او هیچ رابطه‌ای بین داده‌ها وجود ندارد و نمی‌تواند اتصال و ارتباطی بین آن‌ها ایجاد کند (Agustin et al., 2019).

سطح رابطه‌ای: در این سطح مخاطبان از همه داده‌ها و اطلاعاتی که منجر به پاسخ می‌شود استفاده می‌کند و مسئله و رابطه بین داده‌های آن را کاملاً درک می‌کند (Ozdemir, & Yildiz, 2015).

سطح انتزاع تعمیم‌یافته: در این سطح مخاطبان می‌تواند فراتر از اطلاعات مسئله بیندیشد و زمانی که به راه حل رسید آن را تعمیم دهد (Ozdemir, & Yildiz, 2015).

از سطح چهار تا پنج، پیشرفت‌های کیفی بیشتری را می‌بینیم؛ زیرا ساختار آن تعمیم‌یافته است و مخاطب قادر به روبه‌رو شدن با اطلاعات فرضی است که داده نشده است این سطح بالاتر از حالت هدف است. در این سطح مخاطبان می‌توانند تجربیات خود را به موقعیت‌های جدید تعمیم دهند.

Halloway (2012) می‌گوید مدل سولو به معلمان در مورد ارزیابی کردن از نتایج یادگیری به کمک آزمایش کردن از درک و فهم آنان کمک می‌کند. مدل سولو به جای تمرکز بر سطح تفکر یا مرحله تحول ذهنی مخاطبان، بر پاسخ‌های آنان متمرکز شده است. این نشان‌دهنده یک وجه تمایز اساسی بین سولو و کار پیازه و دیگران است که در آن، تمرکز سولو بر توصیف ساختار پاسخ است، نه بر بعضی از ساخت‌های مراحل تحول شناختی یک فرد.

Pegg (2005) معتقد است مدل سولو به وضوح هر حالتی را درون حالت بعدی جای می‌دهد تا خزانه‌ای هر چه غنی‌تر از حالت‌های پیچیده و ظریف عملیات برای یادگیرنده قابل دسترسی باشد. به عبارت دیگر، هم‌زمان با حالت جدید، تمام حالت‌های به دست آمده، برای استفاده مناسب، در دسترس باقی می‌مانند. به طور خاص در حالت‌هایی مانند حالت‌های عملیات صوری یا عینی نمادین، حالت‌های حسی - حرکتی و تصویری تفکر نیز برای ارائه یک دیدگاه بدیل، در دسترس مخاطب قرار دارد. نظریه سولو به جای تمرکز بر سطح تفکر یا مرحله تحول ذهنی مخاطبان، بر پاسخ‌های آنان متمرکز شده است. این، نشان‌دهنده یک وجه تمایز اساسی بین سولو و کار پیازه و دیگران است که در آن، تمرکز سولو بر توصیف ساختار پاسخ است، نه بر بعضی از ساخت‌های مراحل تحول شناختی یک فرد.

هدف اصلی این پژوهش اثر به‌کارگیری بازنمایی‌های چندگانه بر تدریس معلمان ریاضی بر اساس نظریه سولو در

مبحث معادله و معادله خط است.

پرسش‌های پژوهش حاضر از قرار زیر است:

پرسش اصلی: آموزش به‌کارگیری بازنمایی چندگانه بر تدریس مبحث معادله و معادله خط بر اساس نظریه سولو به چه میزان تأثیر می‌گذارد؟

پرسش‌های فرعی عبارت‌اند از:

(۱) به‌کارگیری بازنمایی چندگانه بر تدریس مبحث معادله و معادله خط در سطح تک‌ساختاری به چه میزان تأثیر دارد؟

(۲) به‌کارگیری بازنمایی چندگانه بر تدریس مبحث معادله و معادله خط در سطح چند ساختاری به چه میزان تأثیر دارد؟

(۳) به‌کارگیری بازنمایی چندگانه بر تدریس مبحث معادله و معادله خط در سطح رابطه‌ای به چه میزان تأثیر دارد؟

پیشینه پژوهش

حبیبی و براتی (۱۳۹۹) در پژوهش خود به تأثیر بازنمایی‌های چندگانه بر کاهش بدفهمی‌های جبری پرداخته است و نتایج نشان داده است که بازنمایی‌ها در کاهش بدفهمی‌های جبری مؤثر هستند. ایزدی و ریحانی (۱۴۰۰) در پژوهشی تحت عنوان «بررسی درک دانش‌آموزان دوره دوم ابتدایی شهر تهران از زیر ساختار جزء به کل مفهوم کسر بر اساس نظریه Solo و apos، با استفاده از یک تکلیف غیرمعمول» نتیجه گرفتند که در تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان بر اساس دو مدل Solo و apos مشخص شد که برخی از پاسخ‌های دانش‌آموزان در هیچ‌یک از ساختارهای ذهنی مدل apos قرار نمی‌گیرد، درحالی‌که با استفاده از مدل solo، این امکان فراهم شد تا تمامی پاسخ‌های دانش‌آموزان در یکی از سطوح این مدل قرار گیرند و مورد تحلیل قرار گیرند. کمیجانی و همکاران (۱۴۰۰) در پژوهشی تحت عنوان «بررسی سواد نموداری دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه از نمودار جعبه‌ای با استفاده از نظریه سولو» نتیجه گرفتند که اغلب دانش‌آموزان پایه دهم انسانی نمودار جعبه‌ای را به‌خوبی نمی‌شناسند و در محاسبات عددی و خواندن و تفسیر ضعف دارند و دانش‌آموزان یازدهم ریاضی از درک خوبی برخوردار بودند و پاسخ‌های خلاقانه‌ای ارائه دادند.

کمیجانی و ریحانی (۱۴۰۰) در پژوهشی تحت عنوان «بررسی عملکرد دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه در حل یک نامعادله جبری با استفاده از طبقه‌بندی solo» نتیجه گرفتند که در کلاس دوازدهم، اکثر دانش‌آموزان در سطح بسیار پایینی از درک حل نامعادله‌ها دارند. همچنین دانش‌آموزان کلاس دهم از دانش‌آموزان کلاس یازدهم درک بهتری از خود نشان داده‌اند.

تحقیق Mainali (2021) با عنوان «بازنمایی در تدریس و یادگیری ریاضیات» نتیجه گرفتند که استراتژی‌های آموزشی باید بر ترکیب حالت‌های مختلف نمایش متمرکز شوند تا اولویت‌های دانش‌آموز برای راهبردهای راه‌حل برآورده شود، زیرا برخی دانش‌آموزان دوست دارند از نمودار استفاده کنند درحالی‌که برخی دیگر تمایل به استفاده از معادله یا برخی حالت‌های عددی دیگر دارند.

Deniji و همکاران (2022) در پژوهشی تحت عنوان «ساختار مدل نتایج یادگیری مشاهده‌شده (solo): مروری سیستماتیک با روش ترکیبی پژوهش در آموزش ریاضی» نتایج یافته‌ها نشان داد که مدل سولو به‌طور مناسب نتایج یادگیری دانش‌آموزان را منعکس می‌کند. رابطه مستقیم بین عملکرد دانش‌آموزان و سطوح سولو آن‌ها وجود دارد.

روش تحقیق

پژوهش حاضر از نوع نیمه تجربی با در نظر گرفتن گروه آزمایش و گروه گواه (۲(کنترل) و استفاده از پیش‌آزمون و پس‌آزمون در هر دو گروه است. برای انجام پژوهش حاضر ابتدا با پیاده‌سازی رویکرد تدریس مبتنی بر آموزش بازنمایی‌های چندگانه، و مرتبط کردن آن‌ها با یکدیگر، زمینه درک عمیق موضوعات ریاضی فراهم می‌شود. (De Jong, t. &)

1998, Van Joolingen; Lesh et al., 1987) سپس شاخص‌های مربوط به هر سطح از یادگیری معلمان بر اساس طبقه‌بندی سولو مورد سنجش قرار دهیم. طبقه‌بندی‌هایی که در نظریه سولو به آن پرداخته می‌شود عبارت‌اند از پیش ساختاری، تک ساختاری، چند ساختاری، رابطه‌ای، انتزاع تعمیم‌یافته. برای طراحی این آزمون در ابتدا سؤالاتی باتوجه‌به سطح طبقه‌بندی سولو و مقالات داخلی و خارجی استخراج گردید (جدول ۱ بعلاوه نمونه کار تجزیه و تحلیل شده فصل) سپس بعد از بررسی سؤالات با اساتید راهنما، مشاور و بعد از تعیین روایی آن‌ها تعداد ۱۰ سؤال از سؤالاتی که روایی آن‌ها تایید گردیده بود انتخاب و بعد از سنجش پایایی سؤالات برای پاسخ‌گویی در اختیار متخصصان آموزش ریاضی قرار گرفت.

سؤال: مقادیر x و y را پیدا کنید که این‌ها را برآورده کند معادلات: $x + y = 3$ و $x - y = 0$ با قراردادن پاسخ‌های مخاطبان در سطوح سولو، می‌توان به هر سطح یک مقدار اختصاص داد: پیش ساختاری=۱، تک ساختاری=۲، چند ساختاری=۳، رابطه‌ای=۴، و انتزاع تعمیم‌یافته=۵. سپس می‌توان از این مقادیر برای محاسبه نمره کل یک آزمون استفاده کرد.

جدول ۱. شرح پاسخ‌های مخاطبان باتوجه‌به سطوح SOLO

«سطوح طبقه‌بندی سولو»	«دسته پاسخ»
پیش ساختاری (نقطه را از دست می‌دهد)	بدون پاسخ، x و y مشخص نیست
تک ساختاری (یک جنبه مرتبط)	این مسئله را به‌عنوان معادلات هم‌زمان شناسایی می‌کند، یعنی مقادیر x و y در دو معادله باید برابر باشند.
چند ساختاری (بیش از یک جنبه مستقل مرتبط)	معادلات را به‌عنوان معادلات هم‌زمان شناسایی می‌کند، و روشی را برای حل معادلات انتخاب می‌کند مجهول اول را پیدا می‌کند؛ اما به دلیل ایده‌های از هم‌گسیخته نمی‌تواند به پاسخ صحیح برسد.
رابطه‌ای (چند جنبه مرتبط که در یک ساختار ادغام شده‌اند)	معادلات را به‌عنوان معادلات هم‌زمان شناسایی می‌کند، روش مناسبی را برای حل معادلات انتخاب می‌کند، مجهول اول را پیدا می‌کند و آن را در یکی از معادلات قرار می‌دهد تا مجهول دوم را پیدا کند، و می‌تواند بررسی کند که آیا پاسخ‌ها درست هستند $x=1, y=1$
انتزاع تعمیم‌یافته (تعمیم به یک دامنه جدید)	اشاره می‌کند که هنگام حل با استفاده از روش حذف، دو معادله هم‌زمان با علائم متناوب، درست مانند بالا، باید با هم جمع شوند. روش (حذف، جایگزینی و روش‌های گرافیکی) را برای تعیین سریع‌ترین این نوع معادلات مقایسه می‌کند. یا روش کوتاه‌تری برای یافتن راه‌حل برای مشکل خارج از آنچه آموزش داده شده است، پیشنهاد می‌کند.

جامعه آماری این پژوهش شامل کلیه معلمان پسر (سال اول) در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱ مشغول به تدریس درس ریاضی مدارس چابهار هستند است که تعداد آن‌ها ۴۵ نفر بوده است. روش نمونه‌گیری بر اساس محدودیت‌هایی که وجود داشت روش نمونه‌گیری در دسترس است. نمونه آماری این پژوهش شامل ۱۵ معلم در شهرستان چابهار که از مدارس عادی هستند.

جهت اجرایی کردن چنین طرحی، ابتدا در ۳ جلسه برای هر دو گروه مفاهیم خط، شیب خط، معادله خط، حل دستگاه معادله‌های خطی و... به‌صورت کلی آموزش داده شد. بدین‌صورت که برای گروه آزمایش ۳ جلسه ۴۵ دقیقه‌ای مباحث معادله و معادله خط با استفاده از بازنمایی چندگانه آموزش داده شد و برای گروه کنترل نیز همین تعداد جلسات با استفاده از روش معمول انجام شد. در جلسه اول با استفاده از دست‌سازه ساخته شده و ابزار دنیای واقعی (۳ کتاب ریاضی _ یک باکس و ۵ کتاب در سمت دیگر میز) مفهوم تعادل و متغیر و... ساختار کلی معادله آشنا می‌شوند. در ادامه با آوردن تعدادی لوازم التحریر به کلاس، یک مسئله از دنیای واقعی را وارد دنیای ریاضی و سپس آن را حل می‌کنیم. سپس با استفاده از بازنمایی‌های چندگانه (بازنمایی تصویری، بازنمایی نوشتاری یا نمادی و...) مطرح‌شده در مفهوم خط و معادله

خط از فصل ششم کتاب ریاضی نهم می‌پردازیم. شروع فصل ششم کتاب درسی با انجام یک فعالیت شروع می‌شود (رابطه بین زمان و مسافت) از آنجاکه تسلط بر هر سطح سولو نیازمند تسلط بر سطوح قبلی است پس دارای سطوح پایین‌تری است تا تسلط کافی را به دانش‌آموزان برای حل مسائل کار در کلاس و تمرین بدهند. سپس با توجه به چارچوب طبقه‌بندی سولو و نمونه یک کار تجزیه و تحلیل شده که به آن اشاره شد که شاخص‌های مربوط به هر سطح در طبقه سولو را مشخص می‌کند، سؤالاتی در جهت سنجش عملکرد افراد در هر سطح طراحی و بعد از سنجش روایی و پایایی آن در اختیار ۱۵ مخاطب برای پاسخگویی قرار گرفت و سپس با بررسی نوشته‌ها و امتیازدهی به سؤالات سطح درک و فهم و یادگیری سنجیده خواهد شد.

نمونه‌ای از سؤالات و پاسخ‌ها در هر سطح سولو

سؤال ۱. الف) خط $x = -2$ را روی دستگاه مختصات مقابل رسم کنید. (سطح تک‌ساختاری)
ب) معادله خط d که در دستگاه مقابل رسم شده است را بنویسید. (سطح رابطه‌ای)

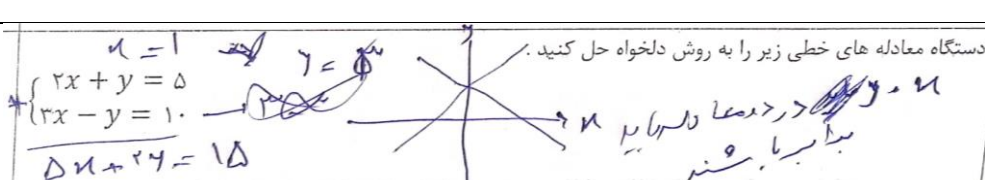
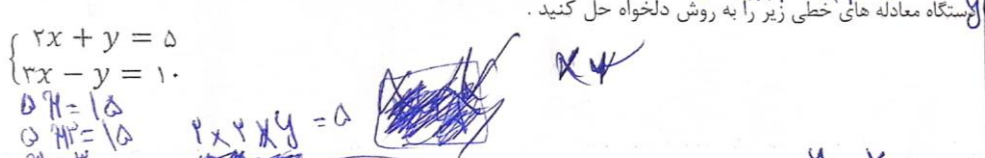
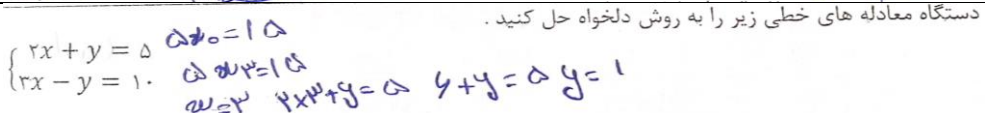
جدول ۲. برخی از پاسخ‌ها

پاسخ مخاطب	سطح پاسخ طبق مدل سولو
الف) خط $x = -2$ را روی دستگاه مختصات مقابل رسم کنید. ب) معادله خط d که در دستگاه مقابل رسم شده است را بنویسید.	تک ساختاری
الف) خط $x = -2$ را روی دستگاه مختصات مقابل رسم کنید. ب) معادله خط d که در دستگاه مقابل رسم شده است را بنویسید.	چند ساختاری
الف) خط $x = -2$ را روی دستگاه مختصات مقابل رسم کنید. ب) معادله خط d که در دستگاه مقابل رسم شده است را بنویسید.	رابطه‌ای

سؤال ۲. دستگاه معادله‌های خطی زیر را به روش دلخواه حل کنید. (رابطه‌ای و انتزاع تعمیم یافته)

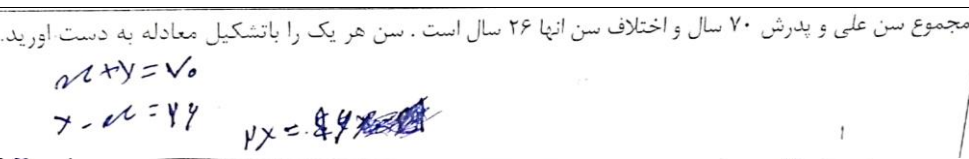
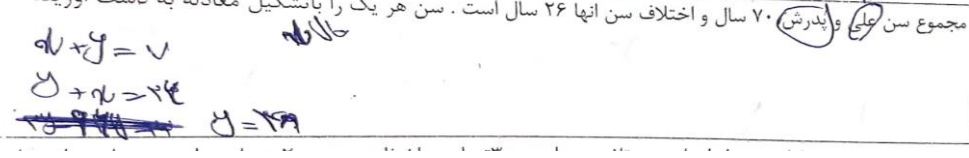
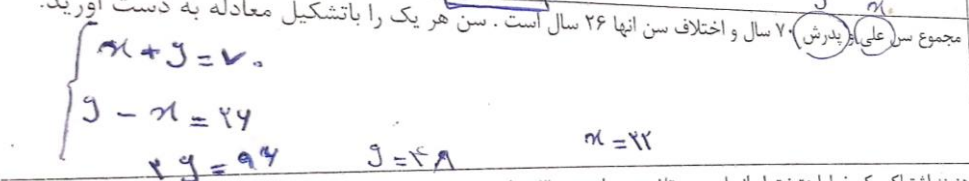
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$$

جدول ۳. برخی از پاسخ‌ها

سطح پاسخ طبق مدل سولو	پاسخ مخاطب
تک ساختاری	دستگاه معادله‌های خطی زیر را به روش دلخواه حل کنید. 
چند ساختاری	دستگاه معادله‌های خطی زیر را به روش دلخواه حل کنید. 
رابطه‌ای	دستگاه معادله‌های خطی زیر را به روش دلخواه حل کنید. 

سؤال ۳. مجموع سن علی و پدرش ۷۰ سال و اختلاف سن آنها ۲۶ سال است. سن هر یک را با تشکیل معادله به دست آورید. (سطح رابطه‌ای و...)

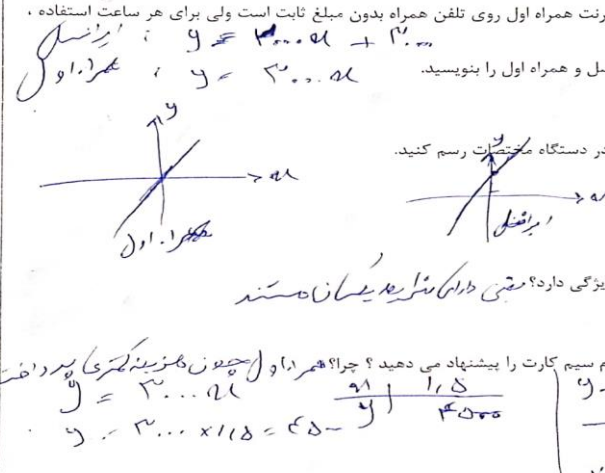
جدول ۴. برخی از پاسخ‌ها

سطح پاسخ طبق مدل سولو	پاسخ مخاطب
تک ساختاری	مجموع سن علی و پدرش ۷۰ سال و اختلاف سن آنها ۲۶ سال است. سن هر یک را با تشکیل معادله به دست آورید. 
چند ساختاری	مجموع سن علی و پدرش ۷۰ سال و اختلاف سن آنها ۲۶ سال است. سن هر یک را با تشکیل معادله به دست آورید. 
رابطه‌ای	مجموع سن علی و پدرش ۷۰ سال و اختلاف سن آنها ۲۶ سال است. سن هر یک را با تشکیل معادله به دست آورید. 

سؤال ۴. هزینه اشتراک یک خط اینترنت ایرانسل روی تلفن همراه ۳۰۰۰ تومان مبلغ ثابت و ۲۰۰۰ تومان برای هر ساعت استفاده است و هزینه اشتراک یک خط اینترنت همراه اول روی تلفن همراه بدون مبلغ ثابت است ولی برای هر ساعت استفاده، ۳۰۰۰ تومان هزینه دارد. (سطح رابطه‌ای و...) (الف) رابطه بین دو سیم کارت ایرانسل و همراه اول را بنویسید. (ب) دو خط به معادله‌های فوق را در دستگاه مختصات رسم کنید. (ج) محل برخورد این دو خط چه ویژگی دارد؟ (د) برای استفاده از ۱/۵ ساعت کدام سیم کارت را پیشنهاد می‌دهید؟ چرا؟

جدول ۵. برخی از پاسخ‌ها

سطح پاسخ طبق مدل سولو	پاسخ مخاطب
تک ساختاری	هزینه اشتراک یک خط اینترنت ایرانسل روی تلفن همراه ۳۰۰۰ تومان مبلغ ثابت و ۲۰۰۰ تومان برای هر ساعت استفاده است و هزینه اشتراک یک خط اینترنت همراه اول روی تلفن همراه بدون مبلغ ثابت است ولی برای هر ساعت استفاده، ۳۰۰۰ تومان هزینه دارد. (الف) رابطه بین دو سیم کارت ایرانسل و همراه اول را بنویسید. (ب) دو خط به معادله‌های فوق را در دستگاه مختصات رسم کنید. (ج) محل برخورد این دو خط چه ویژگی دارد؟ $\frac{1}{5}$ (د) برای استفاده از ۱/۵ ساعت کدام سیم کارت را پیشنهاد می‌دهید؟ چرا؟ $y = 3000x$ همراه اول
چند ساختاری	هزینه اشتراک یک خط اینترنت ایرانسل روی تلفن همراه ۳۰۰۰ تومان مبلغ ثابت و ۲۰۰۰ تومان برای هر ساعت استفاده است و هزینه اشتراک یک خط اینترنت همراه اول روی تلفن همراه بدون مبلغ ثابت است ولی برای هر ساعت استفاده، ۳۰۰۰ تومان هزینه دارد. (الف) رابطه بین دو سیم کارت ایرانسل و همراه اول را بنویسید. (ب) دو خط به معادله‌های فوق را در دستگاه مختصات رسم کنید. (ج) محل برخورد این دو خط چه ویژگی دارد؟ $\frac{1}{5}$ (د) برای استفاده از ۱/۵ ساعت کدام سیم کارت را پیشنهاد می‌دهید؟ چرا؟ $y = 3000x$ همراه اول - چون که مصرف اینترنت

سطح پاسخ طبق مدل سولو	پاسخ مخاطب
رابطه‌ای و انتزاع تعمیم‌یافته	هزینه اشتراک یک خط اینترنت ایرانسل روی تلفن همراه ۳۰۰۰ تومان مبلغ ثابت و ۲۰۰۰ تومان برای هر ساعت استفاده است و هزینه اشتراک یک خط اینترنت همراه اول روی تلفن همراه بدون مبلغ ثابت است ولی برای هر ساعت استفاده ۳۰۰۰ تومان هزینه دارد. الف) رابطه بین دو سیم‌کارت ایرانسل و همراه اول را بنویسید. ب) دو خط به معادله‌های فوق را در دستگاه مختصات رسم کنید. ج) محل برخورد این دو خط چه ویژگی دارد؟ معنی در این شرایط بیان کنید. د) برای استفاده از ۱/۵ ساعت کدام سیم‌کارت را پیشنهاد می‌دهید؟ چرا؟ همراه اول چون هزینه کمتر را پرداخت می‌کند. 

برای تحلیل داده‌ها بعد از کد و سطح‌بندی هر سؤال، اطلاعات و داده‌ها از پاسخ‌های مخاطبان استخراج گردید و داده‌ها وارد نرم‌افزار SPSS گردید و از آمار توصیفی و استنباطی برای تجزیه و تحلیل داده‌ها استفاده گردید. در آمار توصیفی، شاخص‌هایی چون فراوانی، درصد فراوانی، میانگین، واریانس و انحراف معیار و در آمار استنباطی از آزمون پارامتری t-test دوگروهی مستقل در صورت نرمال بودن داده‌ها و از آزمون من‌ویتنی در صورت نرمال نبودن داده‌ها استفاده می‌شود.

یافته‌های پژوهش

جدول ۶. آمار توصیفی متغیر پیش‌آزمون و پس‌آزمون

میانگین	چولگی	کشیدگی	دامنه	بیشترین	کمترین	انحراف استاندارد	واریانس
پیش‌آزمون	۵/۹۷	-۰/۱۵۴	۰/۵۸۸	۱۲	۱۲	۳/۱۶۷	۱۰/۰۳۰
پس‌آزمون	۱۲/۶۷	-۰/۴۶۴	۰/۵۸۶	۱۲	۱۹	۳/۹۵۷	۱۵/۶۶۰

باتوجه به جداول آمار توصیفی متغیر پیش‌آزمون و پس‌آزمون، چون چولگی و کشیدگی در بازه (۲، -۲) قرار دارد می‌توان گفت داده‌ها از توزیع نرمال پیروی می‌کنند که برای صحت این موضوع آزمون‌های نرمال سنجی زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

نرمال سنجی داده‌ها

در این بخش ابتدا به بررسی نرمال بودن داده‌ها از طریق آزمون کولموگروف - اسمیرنوف پرداخته می‌شود، سپس به منظور آزمون هر یک از فرضیه‌ها از آزمون‌های مربوطه استفاده شده است؛ بنابراین، هدف انجام آزمون فرضیه زیر است

فرضیه صفر: داده‌ها نرمال هستند.

فرضیه مقابل: داده‌ها نرمال نیستند.

گروه‌ها	کلموگروف اسمیرنوف		شاپیروویلک		درجه آزادی	سطح معناداری
	آماره	درجه آزادی	سطح معناداری	آماره		
ریاضی	۰/۱۶۰	۸	۰/۰۳۱	۰/۹۶۰	۳۳	۰/۲۶۱
پیش‌آزمون	۰/۱۱۳	۷	۰/۲۰۰	۰/۹۶۵	۳۲	۰/۳۸۱
گروه آزمایش	۰/۱۶۰	۸	۰/۰۳۱	۰/۹۶۰	۳۳	۰/۲۶۱
گروه گواه	۰/۱۱۳	۷	۰/۲۰۰	۰/۹۶۵	۳۲	۰/۳۸۱

گروه‌ها	کلموگروف اسمیرنوف		شاپیروویلک		درجه آزادی	سطح معناداری
	آماره	درجه آزادی	سطح معناداری	آماره		
ریاضی پس‌آزمون	۰/۱۹۸	۸	۰/۰۰۲	۰/۸۸۱	۳۳	۰/۰۰۲
گروه آزمایش	۰/۱۹۸	۸	۰/۰۰۲	۰/۸۸۱	۳۳	۰/۰۰۲
گروه گواه	۰/۱۱۹	۷	۰/۲۰۰	۰/۹۵۹	۳۲	۰/۲۶۳

باتوجه به جداول فقط سطح معناداری در گروه آزمایش پس‌آزمون کمتر از ۰,۰۵ است به معنای این است که داده‌های گروه آزمایش پس‌آزمون نرمال نیستند و در بقیه موارد چون سطح معناداری بیشتر از ۰,۰۵ است پس داده‌ها نرمال هستند.

آزمون فرضیه‌های تحقیق

فرضیه: مخاطبانی که با رویکرد به‌کارگیری مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه آموزش می‌بینند نسبت به مخاطبانی که با رویکرد سنتی آموزش داده می‌شوند، یادگیری بهتری دارند.

H0: میانگین نمرات مخاطبانی که با رویکرد به‌کارگیری مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه آموزش می‌بینند کمتر یا مساوی میانگین نمرات مخاطبانی است که با رویکرد سنتی آموزش داده می‌شوند.

H1: میانگین نمرات مخاطبانی که با رویکرد به‌کارگیری مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه آموزش می‌بینند بیشتر از میانگین نمرات مخاطبانی است که با رویکرد سنتی آموزش داده می‌شوند.

جدول ۷. نتایج آزمون t-test دوگروهی مستقل

پس‌آزمون ریاضی	آزمون لوین	t		درجه آزادی	سطح معناداری
		سطح معناداری	f		
واریانس‌های همگن	۵۴۶.	۴۶۳.	۲,۱۰۲	۶۳	۰۴۰.
واریانس‌های ناهمگن			۲,۱۰۸	۶۱,۶۴۳	۰۳۹.

باتوجه به جدول سطح معناداری آزمون لوین ۰,۴۶۳ است و چون بزرگ‌تر از ۰/۰۵ است، پس می‌توان واریانس دو گروه را همگون دانست (برابری واریانس‌ها تأیید می‌شود) و از سطر اول جدول برای تفسیر نتیجه استفاده می‌گردد؛ و سطح معناداری آزمون t-test برابر با ۰۴۰ است و چون از ۰۰۵ کمتر است نتیجه می‌شود که بین میانگین نمرات مخاطبانی که با رویکرد آموزشی مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه با رویکرد سنتی آموزش دیده‌اند مشاهده می‌شود تفاوت معناداری وجود دارد.

سؤال اصلی پژوهش: تأثیر به‌کارگیری بازنمایی‌های چندگانه بر تدریس معلمان در مبحث معادله و معادله خط بر اساس طبقه‌بندی سولو در کدام سطح قرار دارد؟

باتوجه به نتایج کسب شده می‌توان نتیجه گرفت که معلمان در سطح رابطه‌ای عملکرد بهتری را نسبت به سایر سطوح طبقه‌بندی از خود نشان داده‌اند و سپس به ترتیب در سطوح چند ساختاری، انتزاع تعمیم‌یافته و تک ساختاری عملکرد بهتری داشتند. همچنین در بررسی‌های قبلی میانگین نمرات گروه آزمایش به‌طور معناداری بیشتر از گروه کنترل بود؛ بنابراین در پاسخ به سؤال می‌توان گفت، سطح یادگیری معلمان در سطح رابطه‌ای و انتزاع تعمیم‌یافته متعلق به گروه آزمایش تغییر کیفی بهتری نسبت به گروه گواه داشته‌اند.

جدول ۹. سطح یادگیری معلمان بر اساس طبقه‌بندی سولو

سطوح یادگیری	تعداد سؤال	گروه	درصد میانگین نمرات	مجموع
انتزاع تعمیم‌یافته	۳	آزمایش	٪۴۰	۵۵٪۱
		گواه	٪۱۵,۱	
رابطه‌ای	۷	آزمایش	٪۲۱,۶	٪۳۴,۷
		گواه	٪۱۳,۱	
چندساختاری	۸	آزمایش	٪۱۸,۹	٪۳۲,۳
		گواه	٪۱۳,۴	
تک ساختاری	۱۰	آزمایش	٪۱۳,۹۷	٪۳۱,۱۷
		گواه	٪۱۷,۲	

سؤال اول: به‌کارگیری بازنمایی چندگانه بر تدریس مبحث معادله و معادله خط در سطح تک ساختاری به چه میزان تأثیر دارد؟

همان‌گونه که مشاهده می‌کنیم، میانگین تک‌ساختاری افراد گروه گواه، بیشتر از گروه آزمایش است و باتوجه به قدر مطلق مقدار t و سطح معنی‌داری که به ترتیب برابر با $۱/۴۷۶$ ($\text{sig}=۰/۱۴۵>۰/۰۵$) است، می‌توان گفت که تفاوت معناداری بین سطح یادگیری گروه آزمایش و گواه وجود ندارد و عملکرد مخاطبان گروه گواه در سطح تک ساختاری بهتر بوده است؛ بنابراین استفاده از بازنمایی‌های چندگانه تأثیر چندانی در سطح تک ساختاری ندارد.

جدول ۱۰. نتایج آزمون t -test دوگروهی مستقل در سطح تک‌ساختاری

متغیر وابسته	گروه	فراوانی	میانگین	انحراف استاندارد	معناداری آزمون Levent	t	Df	sig
تک ساختاری	آزمایش	۸	۲/۸۲	۱/۸۹۵	۰/۷۹۶	-۱/۴۷۶	۶۳	۰/۱۴۵
	گواه	۷	۳/۴۷	۱/۶۴۶				

سؤال دوم: به‌کارگیری بازنمایی چندگانه بر تدریس مبحث معادله و معادله خط در سطح چند ساختاری به چه میزان تأثیر دارد؟

همان‌گونه که مشاهده می‌کنیم، میانگین چند ساختاری افراد گروه آزمایش، بیشتر از گروه گواه است و باتوجه به قدر مطلق مقدار t و سطح معنی‌داری که به ترتیب برابر با $۲/۱۰۷$ ($\text{sig}=۰/۰۳۹<۰/۰۵$) است، می‌توان گفت که به‌کارگیری بازنمایی‌های چندگانه بر درک و فهم مبحث معادله و معادله خط مخاطبان در سطح چندساختاری تأثیر دارد، تأیید می‌شود.

جدول ۱۱. نتایج آزمون t -test دوگروهی مستقل در سطح چندساختاری

متغیر وابسته	گروه	فراوانی	میانگین	انحراف استاندارد	معناداری آزمون Levent	t	Df	sig
چند ساختاری	آزمایش	۸	۵/۰۳	۲/۴۳۰	۰/۸۷۸	۱/۰۷	۶۳	۰/۰۳۹
	گواه	۷	۳/۸۱	۲/۲۲۱				

سؤال سوم: به کارگیری بازنمایی چندگانه بر تدریس مبحث معادله و معادله خط در سطح رابطه‌ای به چه میزان تأثیر دارد؟

همان گونه که مشاهده می‌کنیم، میانگین رابطه‌ای افراد گروه آزمایش، بیشتر از گروه گواه است و باتوجه به قدر مطلق مقدار t و سطح معنی‌داری که به ترتیب برابر با $2/123$ ($\text{sig}=0/038<0/05$) است، می‌توان گفت که به کارگیری بازنمایی‌های چندگانه بر درک و فهم مبحث معادله و معادله خط مخاطبان در سطح رابطه‌ای تأثیر مثبت دارد، تأیید می‌شود.

جدول ۱۲. نتایج آزمون t -test دوگروهی مستقل در سطح رابطه‌ای

متغیر وابسته گروه	فراوانی میانگین	انحراف استاندارد	معناداری آزمون Levent	t	Df	sig
رابطه‌ای (r)	آزمایش	۸	۵/۳۹	۴/۲۷۲	۶۳	۰/۰۳۸
	گواه	۷	۳/۳۸	۳/۳۱۹	۲	۰

بحث و نتیجه‌گیری

نکته بسیار مهمی که از نتایج این تحقیق حاصل می‌شود این است که به کارگیری حالت‌های مختلف بازنمایی بدون مرتبط و متصل کردن آن‌ها نمی‌تواند موجب یادگیری مفهومی و عمیق در مخاطبان شود و عدم اتصال و ارتباط این بازنمایی‌ها حتی خود ممکن است سبب ایجاد تعارضات و بدفهمی‌هایی در مخاطبان گردد. این تحقیق با هدف تأثیر به کارگیری بازنمایی‌های چندگانه بر تدریس معلمان ریاضی در مبحث معادله و معادله خط بر اساس نظریه سولو انجام شد. یکی از برتری‌های این طبقه‌بندی نسبت به دیگر چرخه‌های یادگیری، مفهوم آن است که در همه پایه‌ها و همه دروس می‌توان از آن برای ارزیابی مخاطبان و فراگیران و همچنین تدریس یک مفهوم استفاده کرد. البته این طبقه‌بندی هم بدون شک کامل نیست. همان‌طور که نتایج نشان داد مخاطبانی که با استفاده از بازنمایی‌های چندگانه آموزش دیده بودند در سطوح یادگیری انتزاع تعمیم‌یافته، چندساختاری و رابطه‌ای و چند ساختاری بهتر عمل کردند. در سطح انتزاع تعمیم‌یافته ۵۵/۱، در سطح رابطه‌ای ۳۴/۷ و در سطح چند ساختاری ۳۲/۳ و در سطح تک ساختاری ۳۱/۱۷ این درصدها نشان می‌دهند که بیشتر از نصف مخاطبان به سطح تعمیم‌یافته و کمتر از نصف افراد به سطح رابطه‌ای رسیده‌اند و مسئله را درست حل کرده‌اند و این نشان از موفقیت معلمانی است که با به کارگیری بازنمایی چندگانه در آموزش استفاده کرده‌اند. همان‌طور که قبلاً اشاره گردید، در جست‌وجوهای نویسندگان مقاله، پژوهشی که به تأثیر به کارگیری بازنمایی‌های چندگانه بر تدریس معلمان ریاضی در مبحث معادله و معادله خط بر اساس نظریه سولو پرداخت، چه در داخل و چه در خارج یافت نشد؛ اما در پژوهش‌های مرتبط با پاسخ‌های دانش‌آموزان به عنوان مثال پژوهش ریحانی (۱۴۰۰) که بر روی دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه در حل یک نامعادله جبری با استفاده از طبقه‌بندی سولو انجام شد، نتایج حاکی از آن بود که ۳۹٪ از دانش‌آموزان پایه دهم، ۴۳٪ دانش‌آموزان پایه یازدهم و دوازدهم در سطح رابطه‌ای قرار گرفته‌اند و توانسته‌اند پاسخ صحیح را به دست آورند.

نتایج پژوهش نشان داد که استفاده از بازنمایی‌های چندگانه تأثیر قابل توجهی بر بهبود یادگیری در سطح تک ساختاری ندارد. سطح تک ساختاری، که بر درک اولیه و بازنمایی مستقیم مفاهیم متمرکز است، ممکن است کمتر از سطوح بالاتر شناختی تحت تأثیر روش‌های متنوع ارائه محتوا قرار گیرد. درواقع، بازنمایی‌های چندگانه احتمالاً زمانی مؤثرتر خواهند بود که یادگیری نیازمند پردازش عمیق‌تر، سازمان‌دهی اطلاعات و یکپارچه‌سازی مفاهیم باشد.

از سوی دیگر استفاده از بازنمایی‌های چندگانه بر درک و فهم مبحث معادله و معادله خط در سطح چندساختاری بیانگر تأثیر مثبت است. این نتیجه نشان می‌دهد که ارائه مفاهیم ریاضی از طریق چندین شیوه بازنمایی، مانند نمایش‌های عددی، جبری، نموداری و کلامی، می‌تواند در بهبود پردازش اطلاعات و ایجاد ارتباطات مفهومی عمیق‌تر مؤثر باشد. در این سطح از یادگیری، فراگیران نه تنها مفاهیم را شناسایی می‌کنند، بلکه می‌توانند میان آن‌ها ارتباط برقرار کرده و

دانش خود را در موقعیت‌های جدید به کار بگیرند. از منظر نظری، این یافته با دیدگاه‌های مبتنی بر یادگیری چندحسی و نظریه‌های شناختی همخوانی دارد که بر اهمیت ارائه اطلاعات از مسیرهای مختلف تأکید دارند. درواقع، بازنمایی‌های چندگانه موجب می‌شود تا دانش‌آموزان با سبک‌های مختلف یادگیری بتوانند اطلاعات را به شیوه‌ای سازگار با ظرفیت‌های شناختی خود پردازش کنند. علاوه بر این، این روش آموزشی احتمالاً موجب درگیری شناختی بیشتر فراگیران شده و به آن‌ها امکان می‌دهد تا درک عمیق‌تری از مفاهیم ریاضی پیدا کنند.

نتایج این پژوهش همچنین نشان داد که استفاده از نمایش‌های متنوع، مانند نمودارها، روابط جبری، توضیحات کلامی و مدل‌های تصویری، موجب تقویت توانایی یادگیرندگان در برقراری ارتباط میان مفاهیم مختلف شده و به آن‌ها امکان می‌دهد دانش خود را به شیوه‌ای عمیق‌تر سازمان‌دهی و تعمیم دهند. در این سطح از یادگیری، فراگیران قادرند ارتباطات میان مفاهیم ریاضی را درک کرده و آن‌ها را برای حل مسائل جدید به کار گیرند، که بیانگر ارتقای کیفیت یادگیری در نتیجه استفاده از رویکردهای چندگانه است. این یافته‌ها با نظریه‌های شناختی یادگیری، به‌ویژه نظریه بار شناختی و یادگیری سازنده‌گرایانه، همخوانی دارند. بر اساس این نظریه‌ها، ارائه اطلاعات از طریق چندین شیوه بازنمایی، پردازش عمیق‌تر و یکپارچه‌سازی دانش را تسهیل می‌کند. همچنین، این روش موجب می‌شود که دانش‌آموزان مفاهیم را نه به‌صورت مجزا، بلکه به‌عنوان یک شبکه از دانش مرتبط درک کنند؛ بنابراین، یافته‌های این پژوهش بر اهمیت بهره‌گیری از روش‌های آموزشی متنوع در تدریس مفاهیم پیچیده ریاضی تأکید دارد.

سخن آخر، طبقه‌بندی سولو می‌تواند به معلمان در آموزش مفاهیم و همچنین ارزیابی پاسخ‌های شاگردانشان کمک کند. مفاهیم را طوری آموزش دهیم که شاگرد را از سطح پیش ساختاری به سطح رابطه‌ای یا انتزاع تعمیم‌یافته سوق دهیم. هرچند در ابتدایی لازم نیست شاگرد به سطح انتزاع تعمیم‌یافته برسانیم؛ اما با توجه به توانایی‌های شاگردان کلاس می‌توان تا حدودی در این سطح نیز حرکت کرد.

منابع

- ایزدی، مهدی، و ریحانی، ابراهیم. (۱۴۰۰). بررسی درک دانش‌آموزان دوره دوم ابتدایی شهر تهران از زیر ساختار جزء به کل مفهوم کسر بر اساس نظری APOS و SOLO، با استفاده از یک تکلیف غیرمعمول. پژوهشی در برنامه‌ریزی درسی، ۱۸(۴۱)، ۱۲۴-۱۴۱. https://journals.iau.ir/article_682166.html
- محبت پناه، افسانه، و یافتیان، نرگس. (۱۴۰۰). ارزیابی کتاب درسی ریاضی پایه ششم بر اساس سطوح طبقه‌بندی سولو، پژوهش در آموزش ریاضی، ۲(۲)، ۱۵-۲۹. <https://www.sid.ir/paper/1032196/fa>
- نوروزلرکی، فرزانه، بخشعلی زاده، شهرناز، و قربانی سی سخت، زینب. (۱۳۹۸). بازنمایی چندگانه: فرایندی مهم در یاددهی و یادگیری کسرها. نشریه علمی پژوهشی فناوری آموزش (دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران)، ۵(۱)، ۱۳-۲۳. https://jte.sru.ac.ir/article_316.html
- کریمی نیا، خدیجه، امینی فر، الهه، و کمالی خمسه، فرحبخش. (۱۳۹۱). اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان در حل معادله‌ی درجه اول و معادله‌ی خط، چهارمین همایش ملی آموزش، تهران، ایران. <https://civilica.com/doc/1024892>
- گویا، زهرا، و سرشتی، حمیده. (۱۳۸۶). آموزش حسابان: مشکلات موجود و نقش تکنولوژی. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، ۲۴(۸۷)، ۱-۲۳. https://www.roshdmag.ir/Roshdmag_content/media/image/2019/02/14320_orig.pdf

References

- Agustin, S. A., Sugiatno, S., & Suratman, D. (2019). Pemahaman Konseptual Siswa Dikaji dari Taksonomi SOLO dalam Materi Fungsi Eksponensial di SMA. *Jurnal Pendidikan dan Pembelajaran Khatulistiwa (JPPK)*, 8(6). <https://jurnal.untan.ac.id/index.php/jpdpb/article/view/33356>
- Brabrand, C., & Dahl, B. (2008). Constructive alignment and the SOLO taxonomy: a comparative study of university competences in computer science vs. mathematics. In *Conferences in Research and Practice in Information Technology* (Vol. 88, pp. 3-17). Australian Computer Society. <https://vbn.aau.dk/files/212444193/CRPITV88Brabrand.pdf>
- De Jong, T., & Van Joolingen, W. R. (1998). Scientific discovery learning with computer simulations of conceptual domains. *Review of educational research*, 68(2), 179-201. <https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.3102/00346543068002179>
- Deniji, S. M., Baker, P., & Schmude, M. (2022). Structure of the Observed Learning Outcomes (SOLO) model: A mixed-method systematic review of research in mathematics education. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(6), em2119. <https://www.ejmste.com/article/structure-of-the-observed-learning-outcomes-solo-model-a-mixed-method-systematic-review-of-research-12087>
- Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed), *Problems of Representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum. <https://psycnet.apa.org/record/1987-97166-000>
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 61(1), 103-131. DOI: 10.1007/s1064 <https://link.springer.com/article/10.1007/S10649-006-0400-Z>
- Gagatsis, A. & Shaikalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology*, 24, 645-657. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0144341042000262953>
- Goya, Z., & Sarshati, H. (2007). Teaching Mathematics: Existing Problems and the Role of Technology. *Journal of the Development of Mathematics Education*, 24(87), 10-23. https://www.roshdmag.ir/Roshdmag_content/media/image/2019/02/14320_orig.pdf [In Persian]
- Halloway, W. (2012). *Quality learning with reference to the solo model*. Retrieved October, 12, 2012
- Hidayatullah, A. (2019). Comparison of processes construct concept of solo theory and apos theory in mathematics learning. *Humanities & Social Sciences Reviews*, 7(3), 432-237. https://www.researchgate.net/profile/Achmad-Hidayatullah/publication/333138531_Comparison_of_processes_construct_concept_of_SOLO_theory_and_APOS_theory_in_mathematics_learning/links/5ea2f0b7a6fdcc88fc3a45f3/Comparison-of-processes-construct-concept-of-SOLO-theory-and-APOS-theory-in-mathematics-learning.pdf

- Hook, P. (2016). First steps with SOLO taxonomy: Applying the model in your classroom. Essential Resources Educational Publishers Limited. <https://www.otb.ie/wp-content/uploads/2021/03/First-Steps-with-SOLO-Taxonomy-Excerpt.pdf>
- Izadi, M., & Reyhani, E. (1400). Investigating the understanding of second-year elementary school students in Tehran of the substructure of the fraction concept based on APOS and SOLO theory, using an unusual task. *Research in Curriculum Planning*, 18(41), 124-141. https://journals.iau.ir/article_682166.html [In Persian]
- Kariminia, K., Aminifar, E., & Kamali Khamseh, F. (2012). Students' conceptual errors in solving first-degree equations and linear equations, *Fourth National Education Conference*, Tehran, Iran. <https://civilica.com/doc/1024892> [In Persian]
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. <https://psycnet.apa.org/record/1987-97166-000>
- Mainali, B. (2021). Representation in teaching and learning mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST)*, 9(1), 1-21. <https://doi.org/10.46328/ijemst.1111>
- Mohabat Panah, A., & Yaftian, N. (1400). Evaluation of the sixth grade mathematics textbook based on Solo's classification levels, *Research in Mathematics Education*, 2(2), 15-29. <https://www.sid.ir/paper/1032196/fa> [In Persian]
- National Council of Teacher of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics (NCTM-2000)
- Nowruz Laraki, F., Bakhshalizadeh, S., & Ghorbani SiSakht, Z. (2019). Multiple Representation: An Important Process in Teaching and Learning Fractions. *Scientific Research Journal of Educational Technology (Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran)*, 5(1), 13-23. https://jte.sru.ac.ir/article_316.html [In Persian]
- Ozdemir, A. S., & Goktepe Yildiz, S. (2015). The Analysis of Elementary Mathematics Preservice Teachers' Spatial Orientation Skills with SOLO Model. *Eurasian Journal of Educational Research*, 61, 217-236. <https://dergipark.org.tr/en/pub/ejer/issue/30026/324176>
- Pegg, J. (2010). Promoting the acquisition of higher order skills and understandings in primary and secondary mathematics [Paper presentation]. *Australian Council for Education Research Conference*, Melbourne. https://research.acer.edu.au/research_conference/RC2010/16august/19/
- Saputra, D. C., Nurjanah, A., & Retnawati, H. (2019, October). Students' Ability of Mathematical Problem-Solving Based On SOLO Taxonomy. *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1320, No. 1, p. 012070). IOP Publishing. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1320/1/012070/meta>
- Uyun, L. M., & Wardana, M. D. K. (2023). Question Level Analysis based on the Observed Taxonomy of Learning Outcome Structures in the 2013 Elementary School Mathematics Curriculum Book. *Indonesian Journal of Education Methods Development*, 21, 10-21070. <https://ijemd.umsida.ac.id/index.php/ijemd/article/view/718>